Tentamen i Matematisk fysik FTF131

Fredagen 9 maj 2014

Examinator: Henrik Johannesson, tel. 0768-237042.
Inga hjälpmedel är tillåtna på denna tentamen.
Resultat meddelas individuellt via e-post.

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras**, gärna med en översiktlig skiss av tankegång och bärande element! Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. (a) Vad är en Green's funktion? Ge ett exempel på ett fysikproblem som lämpar sig för behandling med Green's funktionmetoder!

(b) Betrakta differentialekvationen

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) u(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

i ett område Ω, med givna randvillkor. Låt $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ vara motsvarande Green's funktion. Använd $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ för att skriva om (1) som en integralekvation. Hur uttrycks randvillkoren i denna integralekvation?

2. Beskriv en metod att lösa integralekvationen

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (t + x)\, \varphi(t)\, dt.$$

För vilka värden på λ existerar en lösning?

3. En partikel med vilomassan m_0 rör sig med en hastighet nära ljushastigheten c och beskrivs av Lagrangefunktionen

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{c^2}} - U(\boldsymbol{r})$$

där $U(\boldsymbol{r})$ är den potentiella energin.

(a) Härled partikelns rörelseekvation och visa att den kan tolkas som Newtons andra lag, med massan $m = m_0/\sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{r}}/c^2}$.

(b) Ta fram ett uttryck för partikelns energi i den icke-relativistiska gränsen $|\dot{\boldsymbol{r}}| \ll c$.

VÄND ⇒

4. (a) Ett av följande två påstånden är korrekt. Vilket? Motivera Ditt svar!
(i) Normen av en kvantmekanisk tillståndsvektor oscillerar under tidsutveckling.
(ii) Om $\hat{P}$ är en projektionsoperator och $\hat{U}$ är en unitär operator så är $\hat{U}\hat{P}\hat{U}^{-1}$ också en projektionsoperator.

(b) Vad är en anti-unitär operator? Kan en anti-unitär operator representera en observerbar storhet i kvantmekaniken? Kan en unitär operator representera en observerbar storhet?

5. (a) Skriv följande permutationer som en produkt av disjunkta cykler och bestäm deras ordningar (där *ordningen* av en permutation är den minsta gemensamma multipeln till cyklernas längder).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}.$$

(b) Skriv permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

som en produkt av transpositoner (där en *transposition* är detsamma som en 2-cykel). Visa att varje sådan produkt måste innehålla minst fyra transpositioner.